UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RODRIGO DIOGO FIGUEIREDO MELO

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA GERAL

MACAPÁ - AP

2019

RODRIGO DIOGO FIGUEIREDO MELO

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA GERAL

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso como exigência para aprovação e posterior obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso

MACAPÁ - AP

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB2/1569

Melo, Rodrigo Diogo Figueiredo.
Introdução à topologia geral / Rodrigo Diogo Figueiredo Melo; Orientador, Kelmem da Cruz Barroso. – Macapá, 2019.
44 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Topologia. 2. Espaço topológico. 3. Conjunto aberto. I. Barroso, Kelmem da Cruz, Orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

514 M528i
CDD. 22 ed.

RODRIGO DIOGO FIGUEIREDO MELO

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA GERAL

A banca examinadora abaixo relacionada aprova a Monografia defendida à mesma, como parte da exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá – UNIFAP.

Macapá, 28 de Novembro de 2019.

Kelmem da Cruz Barroso.

Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso

Orientador – Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Prof. Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte

1º Membro – Universidade Estadual do Amapá – UEAP

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento

2º Membro – Universidade Federal do Amapá – UNIFAP

Dedico este trabalho a minha mãe:

Rosiane Figueiredo Melo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por me dar forças para superar as dificuldades que surgiram durante este caminho e proporcionar, em minha vida, este momento de grande felicidade.

A minha família pelo companheirismo e pela torcida. Sem o apoio dessas pessoas tão especiais para mim, certamente não estaria concretizando este sonho. Esta conquista divido com cada um de vocês!

Ao meu orientador, professor Kelmem da Cruz Barroso pelos seus ensinamentos, competência, paciência e colaboração para a realização deste trabalho.

A todos os meus amigos e amigas do curso, especialmente a duas pessoas com quem convivi por mais tempo: Michele e Nazaré. Agradeço pelos diversos momentos de estudos em grupo, aprendizagem, conselhos e descontração.

Aos membros da banca: professores Marcel Lucas Picanço Nascimento e Ítalo Bruno Mendes Duarte. Obrigado pela paciência e pelas sugestões e correções que melhoraram significativamente esta monografia.

As demais pessoas que de alguma forma me ajudaram à chegar ao fim desta jornada, MUITO OBRIGADO a todos e a todas!

RESUMO

Neste trabalho vamos introduzir conteúdos fundamentais de Topologia Geral, com o objetivo de adquirir um conhecimento de requisitos básicos para o prosseguimento de estudos em Topologia. Portanto, iremos estudar basicamente alguns conceitos de topologia sobre um conjunto qualquer, espaço topológico, conjunto aberto e base de uma topologia.

Palavras-chave: Topologia. Espaço Topológico. Conjunto Aberto. Base de uma Topologia.

ABSTRACT

In this work we will introduce fundamental contents of General Topology, in order to acquire a knowledge of basic requirements for further studies in Topology. Thus, let us basically study some topology concepts about any set, topological space, open set and base of a topology.

Key-words: Topology. Topological Space. Open Set. Base of a Topology.

LISTA DE FIGURAS

1.1 Da esquerda para a direita temos respectivamente que: a esfera contém genus 0, um toro contém genus 1 e um bitoro contém genus 2. 9

1.2 A esfera, o cubo e a massa informe têm a mesma propriedade topológica: genus 0. 9

1.3 Um toro e uma caneca têm a mesma propriedade topológica: genus 1. . . 9

1.4 Um bitoro e um açucareiro têm a mesma propriedade topológica: genus 2. 10

1.5 Representação de algumas topologias sobre o conjunto $X = \{a, b, c\}$. . . . 12

1.6 Representação de duas coleções de subconjuntos do conjunto $X = \{a, b, c\}$. 13

1.7 Ilustração da segunda condição da Definição 1.7 para a base $\mathscr{B}$. 19

1.8 Ilustração da desigualdade triangular $d(w, y) \leq d(w, x) + d(x, y)$. 20

1.9 Ilustração da desigualdade triângular $d(w, z) \leq d(w, x) + d(x, z)$. 21

1.10 Ilustração da primeira condição da Definição 1.7 para a base $\mathscr{B}'$. 22

1.11 Ilustração da segunda condição da Definição 1.7 para a base $\mathscr{B}'$. 22

1.12 Ilustração de que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. 24

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **8**

1. ESPAÇO TOPOLÓGICO **11**

1.1 Espaços Topológicos 11

1.2 Base de uma Topologia 18

1.3 Aplicação: Topologias em $\mathbb{R}$ 30

CONSIDERAÇÕES FINAIS **34**

APÊNDICES **35**

APÊNDICE A 35

APÊNDICE B 35

APÊNDICE C 36

APÊNDICE D 36

APÊNDICE E 37

APÊNDICE F 38

APÊNDICE G 39

APÊNDICE H 41

APÊNDICE I 41

APÊNDICE J 42

APÊNDICE K 43

REFERÊNCIAS **44**

INTRODUÇÃO

No decorrer do século XX, muitos dos conceitos básicos da Matemática passaram por evoluções e generalizações notáveis, e áreas de importância fundamental, como a Teoria dos Conjuntos, a Álgebra Abstrata e a Topologia se desenvolveram enormemente.

Hoje em dia, pode-se considerar a Topologia como o estudo da Invariância[1] das propriedades das figuras geométricas sob transformações chamadas transformações topológicas, isto é, sob aplicações contínuas que têm inversas também contínuas. Resumidamente, a Topologia pode ser definida como o estudo da Continuidade em Matemática e que as figuras geométricas se referem a um conjunto qualquer, não vazio, de pontos em um espaço tridimensional ou maior.

Assim, a Topologia utiliza os mesmos objetos que a Geometria, com a seguinte diferença: não interessa a distância, os ângulos nem a configuração dos pontos. Na Topologia, tais objetos chamados de objetos topológicos[2] que possam transformar-se em outros, através de funções contínuas reversíveis, são equivalentes e indistinguiveis. Ou seja, para um topólogo, não interessam as medidas dos objetos estudados, mas sim, as propriedades topológicas[3] que não se alteram sob transformações contínuas. Por exemplo, para um topólogo não existe diferença entre um biscoito em forma de rosquinha e uma xícara de café. Apesar de que não seja possível transformar um verdadeiro biscoito em forma de rosquinha em uma xícara de café, pode-se provar que topologicamente são a mesma coisa, isto é, do ponto de vista teórico essa transformação é possível.

Nesse sentido, todas as transformações topólogicas demonstradas nas Figuras 1.2, 1.3 e 1.4 envolvem uma propriedade denominada "genus" da superfície das figuras geométricas. De modo geral, o genus é definido conforme o número de buracos que tem o objeto topológico ou, como dizem os topólogos, pelo número de cortes que não se interceptam e que podem ser feitos na superfície desse objeto topológico sem dividi-la em dois pe-

[1]Invariância é a falta de mudança em meio à mudança, ou a persistência de configurações que continuam iguais apesar de incontáveis transformações curiosas.

[2]Objetos topológicos podem ser transformados em outros sendo dobrados, torcidos, esticados, puxados, empenados ou por outras transformações.

[3]Propriedades topológicas são aquelas que se conservam após deformações que não provocaram rasgaduras.

daços. As três ilustrações da Figura 1.1 indicam tipos de genus. Observe que nenhum corte pode ser feito na esfera sem seccioná-la em duas partes, portanto seu genus é 0. Só um corte pode ser feito em um toro sem dividi-lo em duas secções, logo seu genus é 1. Similarmente, um bitoro tem genus 2.

Figura 1.1: Da esquerda para a direita temos respectivamente que: a esfera contém genus 0, um toro contém genus 1 e um bitoro contém genus 2.
Fonte: BERGAMINI, 1969, p.178.

Quando uma criança pega uma bola de massa de modelar, expreme-a na forma de uma caixa e depois a amassa no formato de uma figura geométrica informe, está executando transformações topológicas, pois o que realmente fez foi deformar a bola de massa sem parti-la ou rasgá-la. Ver Figura 1.2.

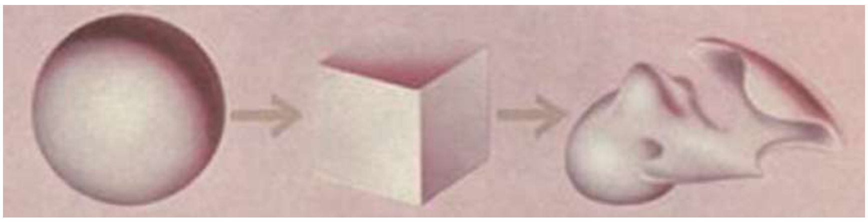

Figura 1.2: A esfera, o cubo e a massa informe têm a mesma propriedade topológica: genus 0.
Fonte: BERGAMINI, 1969, p.178.

Na Figura 1.3 um toro pode ser transformado em uma caneca abrindo-se a parte interna em sua superfície.

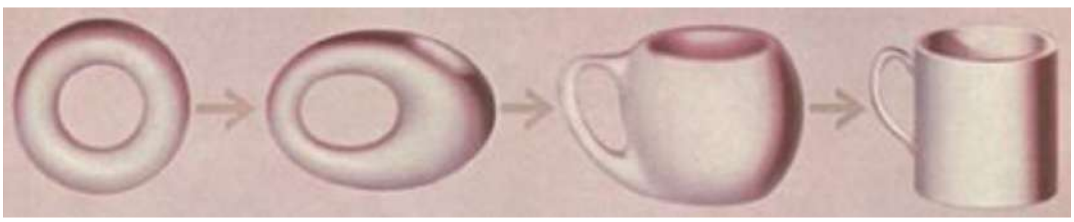

Figura 1.3: Um toro e uma caneca têm a mesma propriedade topológica: genus 1.
Fonte: BERGAMINI, 1969, p.178.

Do mesmo modo, na Figura 1.4, observa-se que um bitoro pode ser transformado em um açucareiro abrindo-se a parte interna em sua superfície.

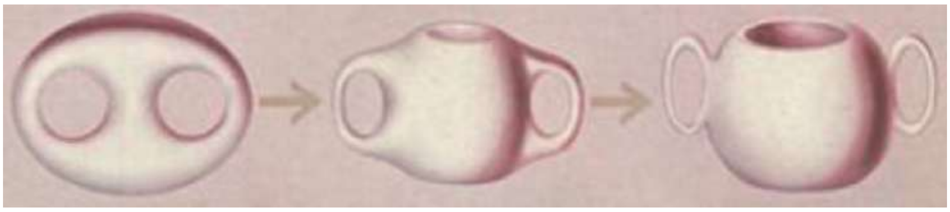

Figura 1.4: Um bitoro e um açucareiro têm a mesma propriedade topológica: genus 2. Fonte: BERGAMINI, 1969, p.178.

A Topologia compreende dois ramos principais: a Topologia Geral ou Conjuntista e a Topologia Algébrica ou Combinatória. A Topologia Geral usa como grande instrumento a Teoria dos Conjuntos, enquanto que a Topologia Combinatória usa a Álgebra, especialmente a Teoria dos Grupos.

Sendo assim, neste trabalho iremos fazer um estudo de alguns conceitos básicos de Topologia Geral. Desta forma, temos o propósito que ele seja um suporte para estudos posteriores de Topologia. Para uma melhor assimilação dos conceitos trabalhados, recomendamos, como pré-requisito, que o leitor compreenda algumas definições e propriedades de Conjuntos.

Em relação à estrutura deste trabalho, o texto principal está organizado no capítulo Espaço Topológico que por sua vez está subdividido nas seções Espaços Topológicos, Base de uma Topologia e Aplicação: Topologia em $\mathbb{R}$. Além disso, nos Apêndices, encontram-se algumas extensões do texto e pré-requisitos.

Na seção Espaços Topológicos, vamos definir uma topologia sobre um conjunto qualquer, espaço topológico e conjunto aberto. Iremos, também, estudar alguns exemplos de topologias e algumas relações entre elas. Posteriormente, na seção Base de uma Topologia, vamos trabalhar com as definições de base para uma topologia sobre um conjunto qualquer e de topologia gerada por uma base, além de que, destacar dois exemplos de bases para topologias sobre o plano e algumas relações existentes entre bases e as topologias geradas por tais bases. Finalmente, na seção Aplicação: Topologia em $\mathbb{R}$, vamos definir duas topologias da reta real e estudar a relação existente entre elas. A fundamentação teórica está pautada principalmente em [10], com a complementação significativa de [6], [7], [8], [9], [11] e [12].

1. ESPAÇO TOPOLÓGICO

Neste capítulo, em um primeiro momento, vamos trabalhar com as definições de uma topologia sobre um conjunto qualquer, espaço topológico e conjunto aberto. Além disso, mostraremos alguns exemplos de topologias sobre um conjunto qualquer. Em um segundo momento, iremos definir o que é uma base para uma topologia e também estudar algumas relações existentes entre bases e as topologias geradas por essas bases. É válido ressaltar que a principal referência utilizada é a [10].

1.1 Espaços Topológicos

A definição de espaço topológico que conhecemos hoje demorou muito tempo para ser formulada. Vários matemáticos, tais como Maurice Fréchet (1878-1973), Felix Hausdorff (1888-1942) e outros, propuseram diferentes definições durante as primeiras décadas do século XX até estabelecerem a definição mais apropriada.

Definição 1.1 *Sejam X um conjunto e $\mathscr{P}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Uma **topologia** sobre X é uma coleção[4] $\mathcal{T}$, com $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(X)$, satisfazendo às seguintes condições:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$.*

2. *A união de uma família[5] qualquer de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$. Isto é, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família, onde $A_\lambda \in \mathcal{T}$, então*

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}.$$

3. *A interseção de uma família finita de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$. Isto é, se $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma família finita de elementos de $\mathcal{T}$, então*

[4]Ver apêndice D.
[5]Ver apêndice E.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}.$$

Um conjunto X para o qual foi definida uma topologia $\mathcal{T}$ é chamado de espaço topológico. Logo, um espaço topológico é um par ordenado $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. É comum dizer apenas "o espaço topológico X", deixando subententida a topologia $\mathcal{T}$.

Definição 1.2 *Seja X é um espaço topológico com uma topologia $\mathcal{T}$, dizemos que um subconjunto A de X é um* ***conjunto aberto*** *de X se A pertence à coleção $\mathcal{T}$.*

Assim, podemos dizer que um espaço topológico é um conjunto X junto à uma coleção de subconjuntos de X, chamados de conjuntos abertos, tais que $\emptyset$ e X são ambos abertos e tal que uniões arbitrárias e interseções finitas de conjuntos abertos são abertos.

Exemplo 1.1 Seja X um conjunto com três elementos:

$$X = \{a, b, c\}.$$

Existem muitas topologias sobre este conjunto X, mas indicaremos apenas nove na figura 1.5.

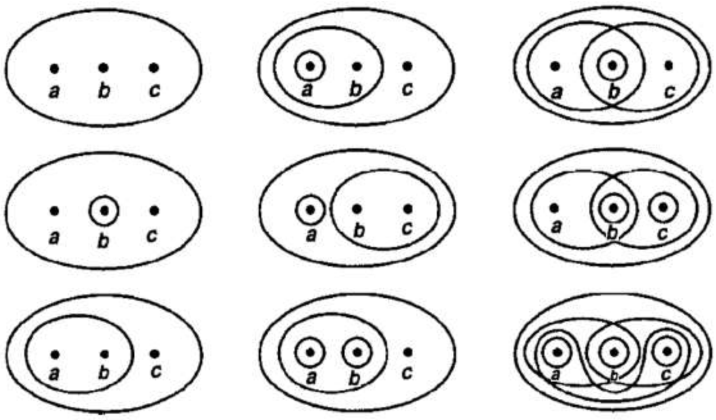

Figura 1.5: Representação de algumas topologias sobre o conjunto $X = \{a, b, c\}$.
Fonte: Adaptado de MUNKRES, 1974, p.76.

Cada uma dessas topologias é representada por um diagrama maior em forma de elipse que contém outros menores e o conjunto vazio. O diagrama maior indica que o conjunto X é um aberto dele mesmo. Já os diagramas menores indicam os outros abertos de X, ou seja, os outros elementos da topologia. Por exemplo, na topologia indicada no canto inferior esquerdo os abertos são:

$$\emptyset,\ \{a,b\} \text{ e } X.$$

Enquanto que na topologia indicada no canto superior direito os abertos são:

$$\emptyset,\ \{b\},\ \{a,b\},\ \{b,c\} \text{ e } X.$$

O próximo exemplo mostra que nem toda coleção de subconjuntos de um conjunto X é uma topologia sobre X.

Exemplo 1.2 Nenhuma das coleções de subconjuntos de $X = \{a,b,c\}$, indicadas na figura 1.6, é uma topologia sobre este conjunto.

Figura 1.6: Representação de duas coleções de subconjuntos do conjunto $X = \{a,b,c\}$.
Fonte: MUNKRES, 1974, p.77.

Com efeito, Seja $\mathscr{E}$ a coleção do lado esquerdo. Observe que

$$\{a\}, \{b\} \in \mathscr{E}.$$

No entanto,

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \mathscr{E}.$$

Portanto, $\mathscr{E}$ não é uma topologia sobre $X = \{a,b,c\}$ porque não satisfaz a condição *2* da Definição 1.1. Seja $\mathscr{D}$ a coleção do lado direito, note que

$$\{a,b\}, \{b,c\} \in \mathscr{D}.$$

Mas,

$$\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\} \notin \mathscr{D}.$$

Portanto, $\mathscr{D}$ não é uma topologia sobre $X = \{a,b,c\}$ porque não satisfaz a condição *3* da Definição 1.1.

Definição 1.3 *Seja X é um conjunto qualquer. Uma topologia sobre X é chamada de* ***topologia indiscreta*** *(ou* ***topologia trivial****, ou* ***topologia caótica****) se X e $\emptyset$ são os únicos conjuntos abertos de X.*

Exemplo 1.3 Na Figura 1.5, a topologia indicada no canto superior esquerdo e designada por $\mathcal{T}_1$ é um exemplo de topologia indiscreta, pois

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}.$$

Definição 1.4 *Seja X um conjunto qualquer. Uma topologia sobre X é chamada de **topologia discreta** se todos os subconjuntos de X são conjuntos abertos de X.*

Exemplo 1.4 Na Figura 1.5, a topologia indicada no canto inferior direito e designada por $\mathcal{T}_9$ é um exemplo de topologia discreta, porque

$$\mathcal{T}_9 = \mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, X\}.$$

Exemplo 1.5 Sejam X um conjunto e $\mathcal{T}_f$ a coleção de todos os subconjuntos A de X, tais que $X - A$ é finito ou é todo o X. Temos que $\mathcal{T}_f$ é uma topologia sobre X chamada de ***topologia dos complementos finitos***. Isto significa:

(i) X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{T}_f$:
Com efeito,
(i.1) se $A = X$, então $X - X = \emptyset$ (é finito) e
(i.2) se $A = \emptyset$, então $X - \emptyset = X$.

(ii) A união de uma família qualquer de elementos de $\mathcal{T}_f$ é um elemento de $\mathcal{T}_f$:
Com efeito, seja M o conjunto de índices obtido pela retirada dos conjuntos vazios com índices em M'. Daí, podemos considerar uma família de conjuntos não vazios de $\mathcal{T}_f$ tal que

$$\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in M'} A_\lambda,$$

onde $M \subset M'$. Dessa forma, se

$$\{A_\lambda\}_{\lambda \in M}$$

é uma família de elementos não vazios de $\mathcal{T}_f$, então para mostrarmos que

$$\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda \in \mathcal{T}_f,$$

tomemos

$$\begin{aligned} X - \bigcup_{\lambda\in M} A_\lambda &= \complement\left(\bigcup_{\lambda\in M} A_\lambda\right) && \text{(ver Apêndice F)}\\ &= \bigcap_{\lambda\in M} \complement A_\lambda && \text{(ver Apêndice G)}\\ &= \bigcap_{\lambda\in M} (X - A_\lambda). \end{aligned}$$

O último conjunto é finito, visto que

$$\bigcap_{\lambda\in M} (X - A_\lambda) \subset (X - A_\lambda) \;\; \forall \lambda \in M$$

e cada conjunto $X - A_\lambda$, para todo $\lambda \in M$, é finito (ver Apêndice K). Logo,

$$X - \bigcup_{\lambda\in M} A_\lambda$$

é finito.

(iii) A interseção de uma família finita de elementos de $\mathcal{T}_f$ é um elemento de $\mathcal{T}_f$:
Com efeito, se

$$A_1, ..., A_n$$

são elementos não vazios de $\mathcal{T}_f$, então para mostrarmos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}_f,$$

tomemos

$$\begin{aligned} X - \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= \complement\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) && \text{(ver Apêndice F)}\\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i && \text{(ver Apêndice G)}\\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (X - A_i). \end{aligned}$$

O último conjunto é finito porque cada conjunto $X - A_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, é finito.
Logo,

$$X - \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

é finito.

Definição 1.5 *Suponhamos que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sejam duas topologias sobre um dado conjunto X. Dizemos que $\mathcal{T}'$ é **mais fina** (ou **maior**) que $\mathcal{T}$ ou que $\mathcal{T}$ é **mais grossa** (ou **menor**) que $\mathcal{T}'$ se*

$$\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}.$$

*Se $\mathcal{T}'$ contém propriamente $\mathcal{T}$, dizemos que $\mathcal{T}'$ é **estritamente mais fina** que $\mathcal{T}$ ou que $\mathcal{T}$ é **estritamente mais grossa** que $\mathcal{T}'$ (ver Apêndices B e C).*

Exemplo 1.6 Esta terminologia é sugerida ao pensarmos em um caminhão cheio de seixo como sendo um espaço topológico, onde as pedras do seixo e todas as uniões de coleções das mesmas são os conjuntos abertos. Ao quebrarmos as pedras para dar lugar à outras menores, o seixo fica mais refinado. Então podemos dizer que a coleção de conjuntos abertos se amplia, caracterizando uma topologia mais fina que a anterior.

Exemplo 1.7 Observe na Figura 1.5 que a topologia do canto superior direito é estritamente mais fina que cada uma das topologias da coluna da esquerda e estritamente mais grossa que cada uma das outras topologias da coluna da direita. Com efeito, seja

$$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$$

a topologia do canto superior direito e sejam

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\},\ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\} \text{ e } \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a,b\}, X\}$$

as topologias da coluna da esquerda. Observe que

$$\mathcal{T}_7 \supsetneqq \mathcal{T}_1,\ \mathcal{T}_7 \supsetneqq \mathcal{T}_2 \text{ e } \mathcal{T}_7 \supsetneqq \mathcal{T}_3.$$

Logo, $\mathcal{T}_7$ é estritamente mais fina que $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$. Além disso, sejam

$$\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\} \text{ e } \mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, X\}.$$

as outras topologias da coluna da direita. Note que

$$\mathcal{T}_8 \supsetneqq \mathcal{T}_7 \text{ e } \mathcal{T}_9 \supsetneqq \mathcal{T}_7.$$

Logo, $\mathcal{T}_7$ é estritamente mais grossa que $\mathcal{T}_8$ e $\mathcal{T}_9$.

Definição 1.6 *Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias sobre um mesmo conjunto X. Dizemos que $\mathcal{T}$ é **comparável**[6] com $\mathcal{T}'$ se*

$$\mathcal{T}' \supset \mathcal{T} \text{ ou } \mathcal{T} \supset \mathcal{T}'.$$

Exemplo 1.8 Na figura 1.5, a topologia do canto superior direito não é comparável com a topologia superior do meio. Em outras palavras, a topologia do canto superior direito não contém a topologia superior do meio e vice-versa. Com efeito, sejam

$$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$$

a topologia do canto superior direito e

$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$$

a topologia superior do meio. Veja que

$$\{b\} \in \mathcal{T}_7 \text{ e } \{b\} \notin \mathcal{T}_4.$$

Logo,

$$\mathcal{T}_4 \not\supset \mathcal{T}_7.$$

Observe também que

$$\{a\} \in \mathcal{T}_4 \text{ e } \{a\} \notin \mathcal{T}_7.$$

Logo,

$$\mathcal{T}_7 \not\supset \mathcal{T}_4.$$

Portanto, mostramos que

$$\mathcal{T}_4 \not\supset \mathcal{T}_7 \text{ e } \mathcal{T}_7 \not\supset \mathcal{T}_4,$$

então $\mathcal{T}_7$ não é comparável com $\mathcal{T}_4$.

[6] Ver Apêndice C.

1.2 Base de uma Topologia

Podemos especificar uma topologia sobre um dado conjunto X se descrevermos a coleção completa de conjuntos abertos dela. No entanto, isto é complicado e, na maioria dos casos, especificamos uma coleção menor de conjuntos de X que seja capaz de definir a mesma topologia.

Definição 1.7 *Se X é um conjunto, uma* ***base*** *para uma topologia sobre X é uma coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X, chamados de* ***elementos básicos****, satisfazendo às seguintes condições:*

1. *Para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento básico B tal que $x \in B$.*
2. *Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, então existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Observação 1 Em particular, a condição *2* é cumprida quando $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$.

Se $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia $\mathcal{T}$ sobre X, então a **topologia $\mathcal{T}$ gerada por $\mathscr{B}$** é definida da seguinte maneira:

Definição 1.8 *Dizemos que um subconjunto A de X é aberto em X (isto é, um elemento de $\mathcal{T}$) se para cada $x \in A$, existe um elemento básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset A$.*

De acordo com a Definição 1.8, todo elemento básico B é um aberto em X de modo que $\mathscr{B} \subset \mathcal{T}$.

Mostraremos brevemente que a coleção $\mathcal{T}$ é, efetivamente, uma topologia sobre X. Mas, primeiro, consideraremos alguns exemplos.

Exemplo 1.9 Seja $\mathscr{B}$ a coleção de todos os interiores de círculos (ou regiões circulares, ou bolas[7] abertas) no plano. Então $\mathscr{B}$ satisfaz ambas condições para uma base (isto é, $\mathscr{B}$ satisfaz as duas condições da Definição 1.7).

(i) Mostremos que $\mathscr{B}$ satisfaz primeira condição da Definição 1.7:
Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}^2$ vamos considerar uma bola $B \in \mathscr{B}$ com centro em x e raio $R > 0$ dada por

$$B_R(x).$$

Assim,

[7] Ver Apêndice J.

$$x \in B_R(x).$$

Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, existe $B_R(x) \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_R(x)$.

(ii) Mostremos que $\mathscr{B}$ satisfaz a segunda condição da Definição 1.7:
Com efeito, sejam $B_1 = B_{R_1}(y)$ e $B_2 = B_{R_2}(z)$ duas bolas abertas de $\mathscr{B}$. Caso B_1 e B_2 sejam disjuntas,

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

No entanto, se B_1 e B_2 não são disjuntas, podemos considerar

$$x \in B_1 \cap B_2.$$

Daí, existe uma bola aberta $B_3 \in \mathscr{B}$ com centro em x e raio $R_3 > 0$ dada por

$$B_{R_3}(x)$$

tal que

$$x \in B_{R_3}(x) \ \text{ e } \ B_{R_3}(x) \subset B_{R_1}(y) \cap B_{R_2}(z) \text{ (ver Figura 1.7).}$$

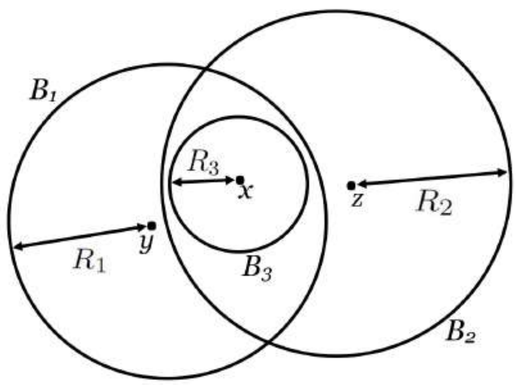

Figura 1.7: Ilustração da segunda condição da Definição 1.7 para a base $\mathscr{B}$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Com efeito, $x \in B_{R_3}(x)$, pois x é o centro desta bola aberta. Agora, vamos mostrar que de fato $B_{R_3}(x) \subset B_{R_1}(y) \cap B_{R_2}(z)$. Para tal, considere

$$R_3 = \min\{R_1 - d(x,y), R_2 - d(x,z)\},$$

sendo d a métrica[8] euclidiana. Dado $w \in B_{R_3}(x)$ vamos mostrar que $w \in B_{R_1}(y)$. Com efeito, temos

[8]Ver Apêndice I

$$d(w, x) < R_3,$$

e da desigualdade triangular

$$d(w, y) \leq d(w, x) + d(x, y),$$

como podemos ver na Figura 1.8.

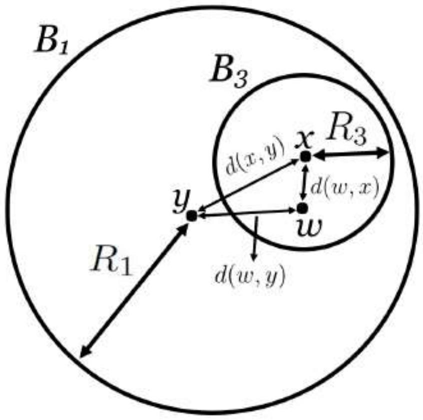

Figura 1.8: Ilustração da desigualdade triangular $d(w, y) \leq d(w, x) + d(x, y)$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Sem perda de generalidade, vamos supor que

$$R_3 = R_1 - d(x, y),$$

temos

$$\begin{aligned} d(w, y) &\leq d(w, x) + d(x, y) \\ &< R_3 + d(x, y) \\ &= R_1 - d(x, y) + d(x, y) \\ &= R_1 \end{aligned}$$

Logo, $d(w, y) < R_1$. Então $w \in B_{R_1}(y)$. Portanto,

$$B_{R_3}(x) \subset B_{R_1}(y).$$

Por outro lado, dado $w \in B_{R_3}(x)$ vamos mostrar que $w \in B_{R_2}(z)$. Com efeito, temos

$$d(w, x) < R_3$$

e da desigualdade triangular,

$$d(w, z) \leq d(w, x) + d(x, z) \text{ (ver Figura 1.9).}$$

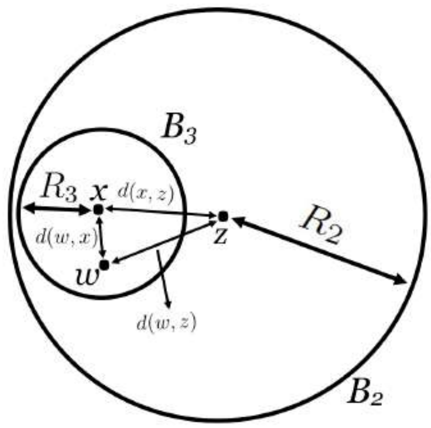

Figura 1.9: Ilustração da desigualdade triângular $d(w,z) \leq d(w,x) + d(x,z)$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos

$$\begin{aligned} d(w,z) &\leq d(w,x) + d(x,z) \\ &< R_3 + d(x,z) \\ &\leq R_2 - d(x,z) + d(x,z) \\ &= R_2 \end{aligned}$$

Logo, $d(w,z) < R_2$. Então $w \in B_{R_2}(z)$. Portanto,

$$B_{R_3}(x) \subset B_{R_2}(z).$$

Portanto, mostramos que

$$B_{R_3}(x) \subset B_{R_1}(y) \text{ e } B_{R_3}(x) \subset B_{R_2}(z),$$

então

$$B_{R_3}(x) \subset B_{R_1}(y) \cap B_{R_2}(z).$$

Portanto, na topologia gerada por este $\mathscr{B}$ do Exemplo 1.9, um subconjunto A do plano é aberto se todo ponto x de A está dentro de alguma região circular contida em A.

Exemplo 1.10 Seja $\mathscr{B}'$ a coleção de todas as regiões retangulares (interiores de retângulos) no plano, onde os retângulos tem lados paralelos aos eixos de coordenadas. Então $\mathscr{B}'$ satisfaz ambas condições para uma base (isto é, $\mathscr{B}'$ satisfaz as duas condições da Definição 1.7).

(i) mostremos que $\mathscr{B}'$ satisfaz a primeira condição da Definição 1.7:
Com efeito, sejam $x \in \mathbb{R}^2$ e uma região circular $B_R(x)$ de centro em x e raio $R > 0$. Vamos considerar um quadrado $B' \in \mathscr{B}'$ inscrito em $B_R(x)$ e com lados paralelos aos eixos de coordenadas (ver Figura 1.10). Assim, $x \in B'$.

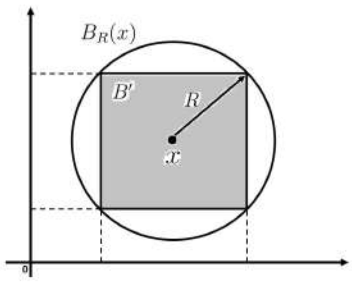

Figura 1.10: Ilustração da primeira condição da Definição 1.7 para a base $\mathscr{B}'$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, existe $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B'$.

(ii) Mostremos que $\mathscr{B}'$ satisfaz a segunda condição da Definição 1.7:
Com efeito, sejam B_1' e B_2' dois elementos de $\mathscr{B}'$. Caso B_1' e B_2' sejam disjuntos,

$$B_1' \cap B_2' = \emptyset.$$

Entretanto, se B_1' e B_2' não são disjuntos, podemos considerar

$$B_1' \cap B_2' \neq \emptyset.$$

Daí, a interseção de duas regiões retangulares não disjuntas no plano e com lados paralelos aos eixos de coordenadas, é também uma região retangular com lados paralelos aos eixos de coordenadas, como é mostrado no Apêndice I. Então, pela Observação 1,

$$B_1' \cap B_2' \in \mathscr{B}' \text{ (ver Figura 1.11).}$$

Logo, conforme a Observação 1, a segunda condição da Definição 1.7 é cumprida.

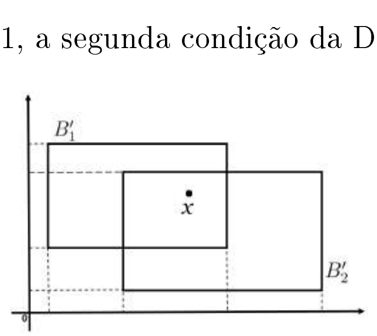

Figura 1.11: Ilustração da segunda condição da Definição 1.7 para a base $\mathscr{B}'$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, na topologia gerada por este $\mathscr{B}'$ do Exemplo 1.10, um subconjunto A do plano é aberto se todo ponto x de A está dentro de alguma região retangular contida em A.

Agora, vamos mostrar que a coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X gerada por uma base $\mathscr{B}$ é, de fato, uma topologia sobre X.

(i) Mostremos que X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{T}$ (ver condição *1* da Definição 1.1). Temos:

(i.1) Vamos supor que $\emptyset \notin \mathcal{T}$, logo deve existir $x \in \emptyset$ tal que para todo $B \in \mathscr{B}$ temos $x \in B$ mas $B \not\subset \emptyset$, o que é uma contradição, pois o conjunto vazio não tem elemento algum. Então, $\emptyset$ é aberto.

(i.2) Para cada $x \in X$, existe algum elemento básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset X$, pois qualquer elemento básico $B \in \mathscr{B}$ é subconjunto de X (a topologia é sobre X). Então, pela Definição 1.8, o conjunto X é aberto. Portanto,

$$X, \emptyset \in \mathcal{T}.$$

(ii) Mostremos que a união de uma família qualquer de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$ (ver condição *2* da Definição 1.1):
Tomemos uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de elementos de $\mathcal{T}$ e provemos que

$$\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda \in \mathcal{T}.$$

Com efeito, dado $x \in \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda$ existe um $\lambda \in J$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, então, pela definição 1.8, existe pelo menos um elemento básico $B \in \mathscr{B}$ tal que

$$x \in B \text{ e } B \subset A_\lambda.$$

Visto que

$$A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda,$$

então

$$x \in B \text{ e } B \subset \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda.$$

Logo, $\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda$ é aberto. Portanto,

$$\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda \in \mathcal{T}.$$

(iii) Mostremos que a interseção de uma família finita de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$ (ver condição *3* da Definição 1.1):
Inicialmente, tomemos dois elementos A_1 e A_2 de $\mathcal{T}$ e provemos que

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}.$$

Com efeito, dado $x \in A_1 \cap A_2$, então

$$x \in A_1 \ e \ x \in A_2.$$

Como A_1 e A_2 são abertos, então, pela Definição 1.8, escolhemos um elemento básico B_1 que contenha x tal que

$$B_1 \subset A_1$$

e um elemento básico B_2 que contenha x tal que

$$B_2 \subset A_2.$$

Logo,

$$x \in B_1 \subset A_1 \ e \ x \in B_2 \subset A_2.$$

Então,

$$x \in B_1 \cap B_2 \ \subset \ A_1 \cap A_2.$$

Daí, pela condição *2* da Definição 1.7, escolhemos um elemento básico B_3 que contenha x tal que

$$B_3 \subset B_1 \cap B_2 \text{ (ver a Figura 1.12).}$$

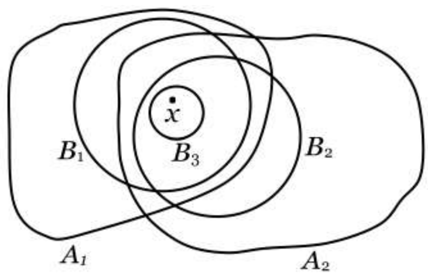

Figura 1.12: Ilustração de que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, pela Definição 1.8,

$$x \in B_3 \text{ e } B_3 \subset A_1 \cap A_2.$$

Logo, $A_1 \cap A_2$ é aberto. Portanto,

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}. \quad (*)$$

Finalmente, mostraremos usando indução que qualquer interseção finita $A_1 \cap ... \cap A_n$ de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$. Observe que este fato é verdadeiro para $n = 2$ (ver resultado $(*)$) e supondo que seja verdadeiro para algum $n - 1 \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$(A_1 \cap ... \cap A_n) = (A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n.$$

Visto que,

$$(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \in \mathcal{T} \text{ (hipótese da indução)}$$

e $A_n \in \mathcal{T}$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) então, pelo resultado $(*)$, temos

$$(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n \in \mathcal{T}.$$

Portanto, a coleção de conjuntos abertos gerados por uma base $\mathscr{B}$ é, efetivamente, uma topologia.

■

Outro modo para descrever a topologia gerada por uma base é dada pelo seguinte lema:

Lema 1.1 *Sejam X um conjunto e $\mathscr{B}$ uma base para uma topologia $\mathcal{T}$ sobre X. Então, $\mathcal{T}$ é igual a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathscr{B}$.*

Demonstração: Vamos chamar de $\mathcal{U}$ para a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathscr{B}$ e provar que $\mathcal{T} = \mathcal{U}$. Ou seja, devemos mostrar que

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \text{ e } \mathcal{U} \subset \mathcal{T}.$$

(i) Mostremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$:
Dada uma união de elementos de $\mathscr{B}$, isto é

$$\bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda \in \mathcal{U}.$$

Note que $B_\lambda \in \mathcal{T}$, para todo $\lambda \in I$, pois

$$\mathscr{B} \subset \mathcal{T}.$$

Visto que $\mathcal{T}$ é uma topologia, então, pela condição *2* da Definição 1.1,

$$\bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda \in \mathcal{T}.$$

Portanto, mostramos que

$$\bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda \in \mathcal{T},$$

então

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{T}.$$

(ii) Mostremos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$:
Uma vez que $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia $\mathcal{T}$ sobre X, então $\mathscr{B}$ gera a topologia $\mathcal{T}$. Então (pela Definição 1.8) dado $A \in \mathcal{T}$, escolhemos para cada $x \in A$ um elemento $B_x \in \mathscr{B}$ tal que

$$x \in B_x \subset A.$$

Ou seja,

$$\{x\} \subset B_x \subset A.$$

Tomando uniões, obtemos

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_x,$$

isto é, A é igual a uma união de elementos de $\mathscr{B}$. Então,

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x \in \mathcal{U}.$$

Portanto, mostramos que

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow A \in \mathcal{U},$$

então

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{U}.$$

Portanto,

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \text{ e } \mathcal{T} \subset \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \mathcal{T} = \mathcal{U}.$$

■

O Lema 1.1 estabelece que cada conjunto aberto A em X pode ser expresso como uma união de elementos básicos.

Quando as topologias são dadas a partir das bases, é útil ter um critério em termos das bases para determinar se uma topologia é mais fina do que outra. Um critério é o lema a seguir.

Lema 1.2 *Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases para as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre um conjunto X. Então são equivalentes as proposições:*

I. $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$.

II. Para cada $x \in X$ e cada $B \in \mathscr{B}$, com $x \in B$, existe $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Demonstração:

1º) Provemos que $I \Rightarrow II$:

Tomemos $x \in X$ e $B \in \mathscr{B}$, com $x \in B$. Temos que

$$B \in \mathcal{T}.$$

Além disso, por hipótese (condição *I*) $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$, isto é,

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

Logo,

$$B \in \mathcal{T}'.$$

Seja $\mathcal{T}'$ gerada por $\mathscr{B}'$. Então, pela Definição 1.8, para cada $x \in B$, existe um elemento $B' \in \mathscr{B}'$ tal que

$$x \in B' \subset B.$$

2º) Provemos que $II \Rightarrow I$:

Dado $A \in \mathcal{T}$, queremos provar que $A \in \mathcal{T}'$, ou seja, que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. Seja $\mathcal{T}$ gerada por $\mathscr{B}$. Então, pela Definição 1.8, para cada $x \in A$, existe um elemento $B \in \mathscr{B}$ tal que

$$x \in B \subset A.$$

Por hipótese (condição *II*), existe um elemento $B' \in \mathscr{B}'$ tal que

$$x \in B' \subset B.$$

Como

$$x \in B' \subset B \text{ e } B \subset A,$$

então

$$x \in B' \subset A.$$

Logo, pela Definição 1.8, A é um aberto da topologia $\mathcal{T}'$, isto é,

$$A \in \mathcal{T}',$$

mostrando que $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$.

■

Exemplo 1.11 Ainda fazendo analogia entre espaço topológico e a caçamba cheia de seixo, vamos pensar nas pedras como sendo os elementos básicos da topologia $\mathcal{T}$. Ao serem reduzidas a pó, as particulas do pó se tornam os elementos básicos da topologia $\mathcal{T}'$. Logo, a nova topologia $\mathcal{T}'$ é mais fina que a topologia antiga $\mathcal{T}$ e cada partícula do pó estava contida em alguma pedra, como afirma o Lema 1.2.

Vimos acima como ir de uma base para a topologia que ela gera. Em alguns momentos precisamos ir na direção oposta, de uma topologia para a base que gera a topologia. O próximo resultado proporcionará uma maneira de obter a base para uma topologia dada.

Teorema 1.1 *Seja X um espaço topológico. Suponha que $\mathscr{C}$ é uma coleção de conjuntos abertos de X tal que para cada conjunto aberto $A \subset X$ e cada $x \in A$, existe um elemento $C \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C \subset A$. Então, $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia sobre X.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia sobre X, primeiro vamos provar que a coleção $\mathscr{C}$ é uma base e, posteriormente, que $\mathscr{C}$ gera a topologia de X.

(i) Provemos que $\mathscr{C}$ é uma base:

(i.1) Vamos mostrar que $\mathscr{C}$ satisfaz a primeira condição da Definição 1.7:

Dado $x \in X$, visto que X é um conjunto aberto, existe, por hipótese, um elemento $C \in \mathscr{C}$ tal que

$$x \in C \subset X.$$

(i.2) Vamos mostrar que $\mathscr{C}$ satisfaz a segunda condição da Definição 1.7:

Seja $x \in C_1 \cap C_2$, onde

$$C_1, C_2 \in \mathscr{C}.$$

Como C_1 e C_2 são abertos, então $C_1 \cap C_2$ é aberto (pela condição *3* da Definição 1.1). Logo, existe, por hipótese, um elemento $C_3 \in \mathscr{C}$ tal que

$$x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2.$$

Portanto, segue de (i.1) e (i.2) que $\mathscr{C}$ é uma base.

(ii) Provemos que $\mathscr{C}$ gera a topologia sobre X:
Seja $\mathcal{T}$ a topologia de X, devemos provar que a topologia $\mathcal{T}'$ gerada por $\mathscr{C}$ coincide com a topologia $\mathcal{T}$, ou seja,

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \text{ e } \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}.$$

(ii.1) Vamos mostrar que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$:
Dados $A \in \mathcal{T}$ e $x \in A$, existe por hipótese um elemento $C \in \mathscr{C}$ tal que

$$x \in C \subset A.$$

Sabemos que $\mathscr{C}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}'$ e A é um elemento da topologia gerada por $\mathscr{C}$, ou seja, temos pela Definição 1.8, que

$$A \in \mathcal{T}'.$$

Portanto, mostramos que

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow A \in \mathcal{T}'.$$

Então

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

(ii.2) Vamos mostrar que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$:
Dado $A' \in \mathcal{T}'$, então (pelo Lema 1.1) A' é igual a uma união de elementos da base $\mathscr{C}$ de $\mathcal{T}'$, ou seja,

$$A' = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} C_\lambda.$$

Já que $\mathscr{C}$ é base para a topologia $\mathcal{T}$, então todo elemento de $\mathscr{C}$ pertence a $\mathcal{T}$. Assim, cada $C_\lambda \in \mathcal{T}$ e pela condição *2* da Definição 1.1,

$$A' = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} C_\lambda \in \mathcal{T}.$$

Portanto, mostramos que

$$A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow A' \in \mathcal{T},$$

então

$$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}.$$

Portanto,

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \text{ e } \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'.$$

■

1.3 Aplicação: Topologias em $\mathbb{R}$

Existem duas topologias interessantes da reta real que podem ser descritas em termos de bases: a Topologia Padrão e a Topologia do Limite Inferior.

Definição 1.9 *Se $\mathscr{B}$ é a coleção de todos os intervalos abertos na reta real,*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \; \forall \, a, b \in \mathbb{R},$$

*a topologia gerada por $\mathscr{B}$ se chama **Topologia Padrão** sobre a reta real.*

A coleção $\mathscr{B}$ é base para a topologia padrão sobre $\mathbb{R}$ porque:

1º) Satisfaz a condição *1* da Definição 1.7:
Com efeito, para cada $x \in \mathbb{R}$ basta tomar qualquer $\varepsilon > 0$. Daí, o intervalo aberto

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

contém x.
Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathscr{B}$ tal que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

2º) Satisfaz a condição *2* da Definição 1.7:
Com efeito, sejam $B_1 = (a_1, b_1)$ e $B_2 = (a_2, b_2)$ dois elementos de $\mathscr{B}$.
Se

$$x \in B_1 \cap B_2,$$

então

$$x \in B_1 \text{ e } x \in B_2.$$

Daí, Tomemos um ε_1 tal que o intervalo aberto

$$(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset B_1.$$

Tomemos também um ε_2 tal que o intervalo aberto

$$(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset B_2.$$

Seja

$$\varepsilon = min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

Então,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B_1 \text{ e } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B_2.$$

Assim,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B_1 \cap B_2.$$

Portanto, existe um intervalo aberto $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathscr{B}$ tal que $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$.

Observação 2 Dado $x \in (a, b)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, a existência de $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$$

segue do fato que todo ponto de (a, b) é ponto interior (ver o capítulo Topologia da Reta da Referência [8]).

Definição 1.10 *Se $\mathscr{B}'$ é a coleção de todos os intervalos semiabertos da forma,*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \; \forall\, a, b \in \mathbb{R},$$

*onde $a < b$, a topologia gerada por $\mathscr{B}'$ se chama **Topologia do Limite Inferior** sobre $\mathbb{R}$.*

A coleção $\mathscr{B}'$ é uma base para a topologia do limite inferior sobre $\mathbb{R}$, porque:

1º) Satisfaz condição *1* da Definição 1.7:
Com efeito, para cada $x \in \mathbb{R}$ basta considerar o intervalo semiaberto $[x, b)$, com $x < b$. Daí,

$$x \in [x, b) \subset \mathbb{R}.$$

Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $[x, b) \in \mathscr{B}'$, com $x < b$, tal que $x \in [x, b)$.

2º) Satisfaz a condição *2* da Definição 1.7:
Com efeito, sejam $B_1' = [x, b_1)$, com $x < b_1$ e $B_2' = [x, b_2)$, com $x < b_2$, dois elementos de $\mathscr{B}'$.
Se

$$x \in B_1' \cap B_2',$$

então

$$x \in B_1' \text{ e } x \in B_2'.$$

Seja

$$b' = min\,\{b_1, b_2\}.$$

Então,

$$[x, b') \subset B_1' \text{ e } [x, b') \subset B_2'.$$

Logo,

$$[x, b') \subset B_1' \cap B_2'.$$

Portanto, existe um intervalo semiaberto $[x, b') \in \mathscr{B}$, com $x < b'$, tal que $x \in [x, b') \subset B_1' \cap B_2'$.

A relação entre as topologias Padrão sobre a reta real e a do Limite Inferior sobre $\mathbb{R}$ é a seguinte:

Teorema 1.2 *A Topologia do Limite Inferior $\mathcal{T}'$ sobre $\mathbb{R}$ é estritamente mais fina que a Topologia Padrão $\mathcal{T}$ sobre a reta real.*

Demonstração: Devemos mostrar que

$$\mathcal{T}' \supset \mathcal{T} \text{ e } \mathcal{T} \not\supset \mathcal{T}'.$$

(i) Mostremos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$:
Dado um elemento $(a, b) \in \mathscr{B}$ (coleção de intervalos abertos de $\mathbb{R}$) e um ponto $x \in (a, b)$, existe um elemento $[x, b) \in \mathscr{B}'$ (coleção de intervalos semiabertos de $\mathbb{R}$) tal que

$$x \in [x, b) \subset (a, b).$$

Logo,

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'.$$

Portanto, pelo Lema 1.2,

$$\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}.$$

(ii) Mostremos que $\mathcal{T} \not\supset \mathcal{T}'$:
Dado um novo elemento $[x, d)$ básico para $\mathscr{B}'$, não existe um intervalo aberto (a, b) satisfazendo a condição

$$x \in (a, b) \subset [x, d).$$

Logo,

$$\mathcal{T} \not\supset \mathcal{T}'.$$

Portanto, mostramos que

$$\mathcal{T}' \supset \mathcal{T} \text{ e } \mathcal{T} \not\supset \mathcal{T}',$$

então $\mathcal{T}'$ é estritamente mais fina que $\mathcal{T}$.

■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Topologia é fonte de muitas pesquisas apesar de que, em nível local e nacional, são poucos os trabalhos voltados para esta área. Nesse sentido, a escolha desse tema para o desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso deve-se ao fato de que nos últimos oito anos, até a data da defesa desta monografia, não houve no curso de Matemática da Universidade Federal do Amapá, monografias exclusivamente direcionadas para a Topologia Geral.

Este trabalho abrange alguns conceitos básicos de Topologia Geral com a expectativa que ele seja um suporte para os estudos de quem deseje aprofundar seus conhecimentos nesta área, pois vai contribuir para o entendimento de conteúdos mais avançados da Topologia, tais como, entre outros: Conjuntos Fechados, Funções Contínuas, Topologia Métrica e Topologia Algébrica.

Atualmente, a Topologia compõe, juntamente com a Álgebra, a Geometria e a Análise, parte fundamental da Matemática.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Subconjunto

Dados os conjuntos A e X, dizemos que A está contido em X

$$A \subset X$$

quando todo elemento de A é também elemento de X. Simbolicamamente, temos:

$$A \subset X \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \;\rightarrow\; x \in X).$$

Logo, se existe pelo menos um elemento de A que não pertence a X, então A não está contido em X. Neste caso, temos:

$$A \not\subset X \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \;\; e \;\; x \notin X).$$

Assim, todo conjunto A que está contido em um conjunto X é chamado de **subconjunto** de X ou **parte** de X.

Quando A está contido em X também se diz que X contém A, o que indicamos pela notação

$$X \supset A.$$

Todo conjunto está contido em si mesmo. Logo, as notações $A \subset X$ e $X \supset A$ não excluem a possibilidade de A ser igual a X. Além disso, o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

APÊNDICE B - Subconjunto Próprio

Um subconjunto A de X, com

$$A \neq \emptyset \text{ e } A \neq X,$$

é denominado **subconjunto próprio** de X (ou A **está contido propriamente** em X ou, ainda, A é **parte própria** de X) se existe pelo menos um elemento de X que não é elemento de A.

Exemplo B.1 O conjunto $A = \{1, 2, 11\}$ é subconjunto próprio do conjunto $A = \{1, 2, 7, 9, 11\}$

Exemplo B.2 Todo número natural que é múltiplo de 6 também é múltiplo 3, no entanto existem números naturais mútiplos de 3 que não são múltiplos de 6. Logo, o conjunto $M(6)$ dos números naturais múltiplos de 6 é suconjunto próprio do conjunto $M(3)$ dos números naturais múltiplos de 3.

APÊNDICE C - Conjuntos Comparáveis

Dois conjuntos A e B são denominados **comparáveis** se

$$A \subset B \text{ } ou \text{ } B \subset A,$$

isto é, se um dos conjuntos está contido no outro. Logo, A e B não são comparáveis se

$$A \not\subset B \text{ } e \text{ } B \not\subset A.$$

Neste caso, existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B, e existe pelo menos um elemento de B que não pertence a A.

Exemplo C.1 Os conjuntos $A = \{\alpha, \beta\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \delta\}$ são comparáveis pois $A \subset B$.

Exemplo C.2 Os conjuntos $C = \{\alpha, \delta\}$ e $D = \{\beta, \delta, \pi\}$ não são comparáveis pois

$$\alpha \in C \text{ } e \text{ } \alpha \notin D.$$

Além disso,

$$\beta \in D \text{ } e \text{ } \beta \notin C.$$

Daí, $C \not\subset D$ *e* $D \not\subset C$.

Exemplo C.3 Vamos considerar $M(2)$ o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 2 e $M(3)$ o conjunto dos números naturais que são múltiplos de 3. Observe que,

$$M(2) \not\subset M(3) \text{ } e \text{ } M(3) \not\subset M(2)$$

porque existe pelo menos um múltiplos de 2 que não é múltiplo de 3 (o 4, por exemplo) e existe pelo menos um múltiplo de 3 que não é múltiplo de 2 (o 9, por exemplo). Logo, os conjuntos $M(2)$ e $M(3)$ não são comparáveis.

APÊNDICE D - Coleção de Conjuntos

Uma **coleção de conjuntos** (ou **família de conjuntos**) é um conjunto cujos elementos também são conjuntos.

Podemos designar uma coleção de conjuntos por letras caligráficas maiúsculas, como por exemplo

$$\mathcal{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, ..., \mathscr{P}, ..., \mathcal{S}, \mathcal{T}, ...$$

para diferenciar das letras latinas maiúsculas que já utilizamos para designar conjuntos.

Exemplo D.1 O conjunto $\mathscr{F} = \{\{a,b\},\{c\},\{b,c,d\}\}$ é uma família de conjuntos, cujos elementos são $\{a,b\}$, $\{c\}$ e $\{b,c,d\}$.

APÊNDICE E - Famílias

Uma família é uma função cujo valor em um ponto x se indica com f_x em vez de $f(x)$. Seja L um conjunto, cujos elementos chamaremos de índices e representaremos genericamente por λ. Dado um conjunto X, uma família de elementos de X com índices em L é uma função

$$x : L \longrightarrow X.$$

O valor de x no ponto $\lambda \in L$ será indicado com o símbolo x_λ, em vez da notação usual $x(\lambda)$. A família x é representada pela notação

$$\{x_\lambda\}_{\lambda \in L}$$

ou simplesmente $\{x_\lambda\}$ quando não houver dúvida sobre o conjunto de índices L.

Exemplo E.1 Tomemos $L = \{1,2\}$ como conjunto de índices. Dado um conjunto X, uma família de elementos de X com índices em L é uma função

$$x : \{1,2\} \longrightarrow X,$$

onde os valores desta função nos pontos 1 e 2 são representados por x_1 e x_2.

Quando $L = \{1,2,...,n\}$ é o conjunto dos números naturais desde 1 até n, uma família $x : L \longrightarrow X$ chama-se uma n-upla de elementos de X. Uma n-upla

$$x = (x_i)_{i \in L}$$

é comumente representada pela notação

$$x = (x_1, ..., x_n).$$

O elemento x_1 é chamado a i-ésima coordenada da n-upla $x = (x_1, ..., x_n)$.

Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos com índices em L, Isto é, a cada $\lambda \in L$ fazemos corresponder um conjunto A_λ. A **reunião** dessa família é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A_λ. Ela é representada pela notação

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

ou, simplesmente, $\cup A_\lambda$. Assim,

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x;\ \textit{existe}\ \lambda \in L\ \textit{com}\ x \in A_\lambda\}.$$

Em outras palavras, $\bigcup A_\lambda$ é o conjunto dos elementos que pertencem a algum A_λ. Analogamente, a **interseção** da família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é o conjunto dos elementos que pertecem simultaneamente a todos os A_λ. Ela é representada pela notação

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$$

ou simplesmente $\cap A_\lambda$. Portanto,

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x;\ x \in A_\lambda\ \textit{para todo}\ \lambda \in L\}.$$

Quando $L = \{1, 2, ..., n\}$, escreve-se

$$\bigcup_{i \in L} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup ... \cup A_n \text{ e}$$

$$\bigcap_{i \in L} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap ... \cap A_n.$$

APÊNDICE F - Diferença e Complementar

A **diferença** entre os conjuntos A e B é o conjunto $A - B$ formado pelos elementos de A que não pertencem B. Simbolicamente, temos:

$$A - B = \{x;\ x \in A\ e\ x \notin B\}.$$

Não se exige que B esteja contido em A para formar a diferença $A - B$. Quando A e B são disjuntos, nenhum elemento de A pertence a B, portanto, $A - B = A$. Em qualquer caso, tem-se $A - B = A - (A \cap B)$.

Quando se tem $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se o **complementar de** B **em relação a** A e escreve-se

$$A - B = \complement_A B.$$

Frequentemente, tem-se um conjunto E denominado **conjunto fundamental** (ou **universo do discurso** ou **conjunto universo**) que contém todos os conjuntos que ocorrem numa certa discursão. Neste caso, a diferença $E - X$ chama-se simplesmente o complementar de X e indica-se com a notação $\complement X$, sem necessidade de mencionar explicitamente que se trata de complementar em relação a E.

APÊNDICE G - As Leis de De Morgan

As leis de De Morgan afirmam que:

(i) o complementar da interseção é igual à reunião dos complementares e

(ii) o complementar da reunião é igual à interseção dos complementares.

Em outras palavras, a complementação transforma a interseção na reunião dos complementares e a reunião na interseção dos complementares.

Exemplo G.1 Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in M}$ de subconjuntos de um **conjunto fundamental** X, vamos provar que:

$$\text{(i) } \complement\left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda \quad \text{e} \quad \text{(ii) } X - \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \complement\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i.$$

Em relação a (i), devemos mostrar que

$$\complement\left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda \quad \text{e} \quad \bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda \subset \complement\left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right).$$

1º) Vejamos que

$$\complement\left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda.$$

Com efeito, dado $x \in E$, temos:

$$\begin{aligned} x \in \complement\left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right) &\Rightarrow x \notin \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda. \end{aligned}$$

2º) Vejamos que

$$\bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda \subset \complement\left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda\right).$$

Com efeito, dado $x \in E$, temos:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda \quad &\Rightarrow \quad x \notin \complement \left(\bigcap_{\lambda \in M} \complement A_\lambda \right) \\ &\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{\lambda \in M} \complement(\complement A_\lambda) \\ &\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda \\ &\Rightarrow \quad x \in \complement \left(\bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda \right). \end{aligned}$$

■

Agora, em relação (ii), devemos mostrar que

$$\complement \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i \ \text{ e } \ \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i \subset \complement \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right).$$

1º) Vejamos que

$$\complement \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i.$$

Com efeito, dado $x \in E$, temos:

$$\begin{aligned} x \in \complement \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \quad &\Rightarrow \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ &\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i. \end{aligned}$$

2º) Vejamos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i \subset \complement \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i &\Rightarrow x \notin \complement\left(\bigcup_{i=1}^{n} \complement A_i\right) \\ &\Rightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{n} \complement(\complement A_i) \\ &\Rightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ &\Rightarrow x \in \complement\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

■

APÊNDICE H

Vamos mostrar que a interseção de quaisquer duas regiões retangulares (interiores de retângulos) no plano, com lados paralelos aos eixos de coordenadas, é também uma região retangular com lados paralelos aos eixos de coordenadas ou é vazio.

Demonstração: Sejam R_1 e R_2 dois retângulos quaisquer do plano com lados paralelos aos eixos de coordenadas. Vamos mostrar que $R_1 \cap R_2$ é também um retângulo com lados paralelos aos eixos de coordenadas ou é vazio. Com efeito, se R_1 e R_2 são disjuntos, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Caso contrário, temos duas situações:

1ª) Se R_1 e R_2 são comparáveis, então $R_1 \subset R_2$ ou $R_2 \subset R_1$ e $R_1 \cap R_2$ é algum deles.

2ª) Se R_1 e R_2 não são comparáveis, então $R_1 \not\subset R_2$ e $R_2 \not\subset R_1$. Uma vez que R_1 e R_2 são paralelos aos eixos de coordenadas, os lados de $R_1 \cap R_2$ também são paralelos aos eixos de coordenadas. Então, os lados opostos de $R_1 \cap R_2$ são paralelos. Consequentemente, dois lados consecutivos dessa interseção são perpendiculares e todos os seus ângulos internos são iguais a $90°$. Portanto, $R_1 \cap R_2$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos de coordenadas.

■

APÊNDICE I - Definição e um Exemplo de Espaço Métrico

Uma **métrica** num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

d1) $d(x,y) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x,y) > 0$;

d3) $d(x,y) = d(y,x)$;

d4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Os postulados *d1* e *d2* dizem que $d(x,y) \geq 0$ e que $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado *d3* afirma que a distância $d(x,y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição *d4* chama-se desigualdade do trângulo; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Um **espaço métrico** é um par (M,d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de espaço métrico. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, ...x_n)$ e $y = (y_1, ...y_n)$, escrevemos:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}, \\
d'(x,y) &= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \ e \\
d''(x,y) &= \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.
\end{aligned}
$$

As funções d, d', $d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são métricas. A métrica d é chamada euclidiana. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas). Evidentemente, para considerações de natureza geométrica, d é a métrica natural pois fornece a distância da geometria euclidiana. Por outro lado, d' e d'' são formalmente mais simples, de manipulação mais fácil.

Observação: quando não dissermos explicitamente que métrica estamos trabalhando em $\mathbb{R}^n$ fica subentendido que se trata da métrica euclidiana.

APÊNDICE J - Bolas e Esferas

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado, um número real $R > 0$, definimos:

A **bola aberta** de centro a e raio R é o conjunto $B(a;R)$ ou $B_R(a)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que R. Ou seja,

$$B(a;R) = \{x \in M; d(x,a) < R\}.$$

A **bola fechada** de centro a e raio R é o conjunto $B[a;R]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a R do ponto a. Ou seja,

$$B[a;R] = \{x \in M; d(x,a) \leq R\}.$$

A **esfera** de centro a e raio R é o conjunto $S(a;R)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) = R$. Assim:

$$S(a;R) = \{x \in M; d(x,a) = R\}.$$

Evidentemente, $B[a;R] = B(a;R) \cup S(a;R)$, reunião disjunta.

APÊNDICE K

Colorário 6.5 da Referência [10]: Se B é um subconjunto do conjunto finito A, então B é finito. Se B é um subconjunto próprio de A, então o número de elementos em B é menor que o número de elementos em A.

REFERÊNCIAS

[1] BAIER, T. **O nexo "geometria fractal": produção da ciência contemporânea tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico.** Rio Claro, 147 p., 2005. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP.

[2] BELL, E. T. **Historia de Las Matematicas**. México, D.F : Fondo de Cultura Economica, 1985.

[3] BERGAMINI, D. **As Matemáticas.** Rio de Janeiro: J. Olympio, 1969.

[4] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[5] EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Ed. da UNICAMP, 1995.

[6] FILHO, E. A. **Teoria Elementar dos Conjuntos**, Nobel, 1974.

[7] LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**, Textos universitários, SBM, 1970.

[8] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2017.

[9] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, 3ª edição. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1993.

[10] MUNKRES, J.R. **Topology: A First Course**, Prentice Hall-New Jersey, 1974.

[11] NOVAES, G. P. **Introdução à Teoria dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

[12] VILCHES, M. A. **Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática e Estatística UERJ, 2000.